Dies geschieht durch Verknüpfen der notwendigen Bedingung $H \equiv 0$ mit gewissen Symmetrieannahmen. Eine Übersicht über die so erzeugten klassischen Minimalflächen (z.B. das Katenoid) findet man mit den entsprechenden Rechnungen in den Kapiteln "Spezielle Minimalflächen" bei J.C.C. Nitsche. Lawson widmet diesem Bereich ebenfalls ein eigenes Kapitel.

§ 2 Lokale Beschreibung von Flächen in $\mathbb{R}^3$, einige geometrische Größen

Dieser Abschnitt enthält die allgemeine Definition von Flächen in $\mathbb{R}^3$ als zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten und gibt eine Übersicht über elementare geometrische Konzepte wie Tangentialraum, Krümmung, etc. Als Quelle zum Selbststudium empfehlen wir das Buch von M.P. Do Carmo "Differential Geometry of Curves and Surfaces".

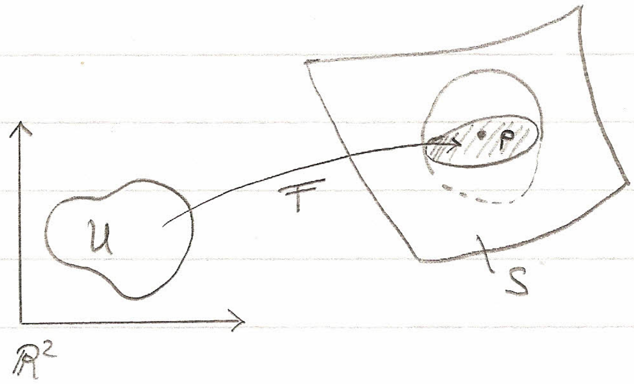
DEFINITION: Eine Teilmenge S von $\mathbb{R}^3$ heißt Fläche der Differenzierbarkeitsklasse C^r, $r \geq 1$, falls es zu jedem $p \in S$ offene Mengen $V \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $F : V \to U$ gibt, so daß folgende Aussagen gelten:

i) F ist von der Klasse C^r

ii) $F(U) = S \cap V$ iii) F ist injektiv

iv) $DF(u,v)$ hat in allen $(u,v) \in U$ den maximalen Rang 2.

Man nennt F eine <u>lokale Parametrisierung</u> oder ein <u>lokales Koordinatensystem</u> von S bei p.



Bedingung iv) sagt, daß die beiden Vektoren $\partial_1 F(u,v)$, $\partial_2 F(u,v) \in \mathbb{R}^3$ an jeder Stelle $(u,v) \in U$ linear unabhängig sein müssen. Folglich kann man sich eine Fläche S lokal so vorstellen, daß man sie durch Verbiegen eines kleinen Stücks der Ebene (durch F) erzeugt. Die Injektivität von F schließt Selbstdurchschneidungen der Fläche S aus

<u>Beispiel</u>: $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ sei C^r $\Longrightarrow$ G_f ist eine Fläche der Klasse C^r.

G_f hat sogar eine globale Parametrisierung, nämlich die Graphenabbildung

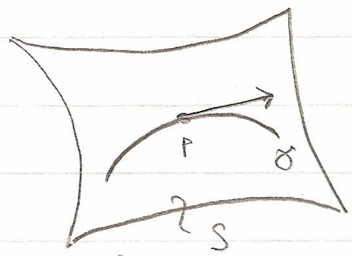
$$\Omega \ni (u,v) \longrightarrow (u,v,f(u,v)) \in \mathbb{R}^3 .$$

Verbunden mit dem Flächenbegriff ist das geometrische Konzept der Tangentialebene.

<u>DEFINITION</u>: Ein Vektor $\eta \in \mathbb{R}^3$ heißt Tangenvektor an die Fläche S im Punkt p, wenn es eine Kurve γ in S gibt mit

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = \eta .$$

Die Menge aller Tangenvektoren an S in p bezeichnen wir mit $T_p S$.



Eine einfache Überlegung zeigt

LEMMA 1.1: Sei S eine Fläche, $p \in S$ und F eine lokale Parametrisierung von S bei p mit $F(u_0, v_0) = p$. Dann gilt:

a) $T_p S$ ist ein zweidimensionaler Vektorunterraum von $\mathbb{R}^3$, genannt Tangentialebene an die Fläche in p.

b) $T_p S$ wird aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\partial_1 F(u_0, v_0)$, $\partial_2 F(u_0, v_0)$, also

$$T_p S = DF(u_0, v_0)(\mathbb{R}^2).$$

Beweis: Übungsaufgabe!

Ist F wie eine lokale Parametrisierung bei $p \in S$, so gilt:

$$\partial_1 F(u,v) \times \partial_2 F(u,v) \in \left(T_{F(u,v)} S\right)^{\perp}$$

für alle Punkte (u,v) aus dem Definitionsbereich von F, anders gesagt: ist $q \in S$ nahe bei p, so wird durch

$$\boxed{\mathcal{N}(q) := \left(\partial_1 F \times \partial_2 F\right) \Big/ _{|\partial_1 F \times \partial_2 F|} \left(F^{-1}(q)\right)}$$

ein lokales Normalenfeld von S bei p erklärt.

Eine interessante geometrische Frage ist, ob man eine Fläche S stets mit einem globalen Normalenfeld ξ versehen kann, d.h. ξ hängt stetig vom Fußpunkt p ab und erfüllt $|\xi(p)| = 1$ sowie $\xi(p) \in (T_p S)^\perp$ für alle $p \in S$. Das Beispiel des Möbiusbandes zeigt, daß globale Normalenfelder nicht existieren müssen, dies ist vielmehr äquivalent zur Orientierbarkeit von S.

Im Falle eines Graphen $S = G_f$ kann man sofort ein Normalenfeld aufschreiben:

$$(-\nabla f(u,v), 1) \Big/ \sqrt{1+|\nabla f(u,v)|^2}$$

ist das kanonische "nach oben zeigende" Einheitsnormalenfeld.

Uns interessieren im folgenden nur lokale Eigenschaften von Flächen, deshalb können wir uns direkt auf den Fall beschränken, daß

$$S = F(\Omega)$$

gilt mit einer regulären Parametrisierung $F : \mathbb{R}^2 \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, wo F injektiv, r-mal stetig differenzierbar mit $\partial_1 F \times \partial_2 F \neq 0$ ist. (Offenbar bedeutet $\partial_1 F \times \partial_2 F \neq 0$ gerade, daß das Differential von F überall Rang 2 hat.)

Für diesen Fall wollen wir uns überlegen, daß

$$\mathbb{A}(S) := \int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du\, dv$$

eine sinnvolle Definition für den Flächeninhalt von S ergibt.

Wie bei Graphen zerlegt man Ω in kleine achsenparallele Quadrate Q

und ersetzt dort $F(u,v)$ durch die affin lineare Approximation

$$L(u,v) = F(u_0,v_0) + DF(u_0,v_0)\big((u,v)-(u_0,v_0)\big).$$

Dann entspricht das Flächenstück $F(Q)$ dem Anteil $L(Q)$, und genau wie vorhin sieht man

$$|Q| \cdot \left(|\partial_1 F(u_0,v_0)|^2 \cdot |\partial_2 F(u_0,v_0)|^2 - \big(\partial_1 F(u_0,v_0) \cdot \partial_2 F(u_0,v_0)\big)^2 \right)^{1/2}$$

für den Flächeninhalt von $L(Q)$. Nun ist

$$(\ldots\ldots)^{1/2} = |\partial_1 F(u_0,v_0) \times \partial_2 F(u_0,v_0)|,$$

und mit Approximation folgt die angestrebte Beziehung.

<u>DEFINITION:</u> Es sei $S = F(\Omega)$ eine regulär parametrisierte Fläche. Dann heißt

$$A(S) := \int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du\, dv$$

<u>Flächeninhalt von S.</u>

<u>BEMERKUNG:</u> (Parameterinvarianz)
Ist $\varphi : \Omega' \to \Omega$ ein Diffeomorphismus des Gebietes $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$ auf Ω, so parametrisiert $\tilde{F} := F \circ \varphi$ natürlich auch die Fläche S. Bekannte Transformationsregeln für Integrale ergeben

$$\int_\Omega |\partial_1 F \times \partial_2 F| \, du\, dv = \int_{\Omega'} |\partial_1 \tilde{F} \times \partial_2 \tilde{F}| \, du\, dv,$$

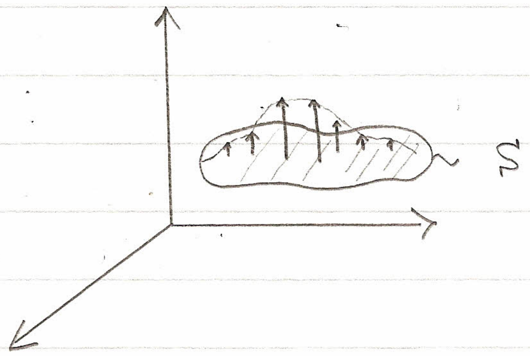
d.h. $\mathbb{A}(S)$ hängt nicht von der speziell gewählten Parametrisierung ab.

Für eine allgemeine Definition des Flächeninhalts, die nicht an eine Parametrisierung von S geknüpft ist, vergleiche man M.P. Do Carmo, Kapitel 2.8.

■

Sei $S = F(\Omega)$ regulär parametrisierte Fläche.

Anschaulich (wie auch bei den Graphen) nennt man S lokal flächenminimal, wenn



$$\mathbb{A}(S) \le \mathbb{A}(\tilde{S})$$

gilt für jede Fläche $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$, die sich von S nur innerhalb einer kleinen Kugel unterscheiden, die den Rand von S nicht trifft.

Solche Vergleichsflächen $\tilde{S}$ kann man wie folgt erzeugen: Sei F die Parametrisierung von S und

$$\eta(u,v) := \partial_1 F(u,v) \times \partial_2 F(u,v) \Big/ |\partial_1 F(u,v) \times \partial_2 F(u,v)|$$

Für $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \equiv 0$ nahe $\partial\Omega$ und $|\varepsilon|$ genügend klein ist

$$F_\varepsilon(u,v) := F(u,v) + \varepsilon \cdot \varphi(u,v)\ \eta(u,v)$$

reguläre Parametrisierung einer Fläche S_ε, die durch normale Verschiebung aus S entsteht.

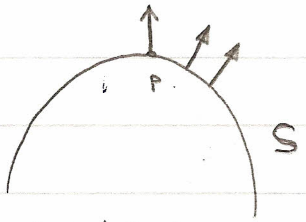
Die notwendige Bedingung für Minimalität lautet

$$\frac{d}{d\varepsilon|_0} A(S_\varepsilon) = 0 ,$$

und wir wollen nachfolgend dieser Gleichung einen geometrischen Gehalt geben. Dies führt uns zwangsläufig auf den

<u>Krümmungsbegriff für Flächen:</u> Sei $S = F(\Omega)$, $F: \mathbb{R}^2 \supset \Omega \to \mathbb{R}^3$, regulär parametrisierte Fläche und $p \in S$ beliebig. Anschaulich wird man Krümmung von S bei p durch die Änderung des Normalenfeldes N messen wollen, die entsteht, wenn man auf S längs einer Kurve γ durch p fortschreitet.

Das heißt präzise:
Große Krümmung liegt vor, wenn N seine Richtung bei p schnell verändert, die Krümmung ist dagegen fast 0, wenn N – wie bei einer Ebene – nahezu konstant bleibt.



"starke" Krümmung

"kleine" Krümmung

Um zu einer Definition zu gelangen, setzen wir

$$N(q) := \partial_1 F \times \partial_2 F \Big/ |\partial_1 F \times \partial_2 F| \; \left(F^{-1}(q)\right), \quad q \in S,$$

und wählen $\tau \in T_p S$ sowie eine Kurve γ in S mit $\gamma(0) = p$ sowie $\dot\gamma(0) = \tau$.

Dann ist $t \to N(\gamma(t))$ Kurve in der Sphäre S^2

mit $\mathcal{N}(\gamma(0)) = \mathcal{N}(p)$ und

$$\frac{d}{dt|_0} \mathcal{N}(\gamma(t)) \perp \mathcal{N}(p)$$

(gemäß $\mathcal{N}(\gamma(t)) \cdot \mathcal{N}(\gamma(t)) = 0$). Die letzte Beziehung sagt nun gerade

$$\frac{d}{dt|_0} \mathcal{N}(\gamma(t)) \in T_p S .$$

Da die Bildung $\frac{d}{dt|_0} \mathcal{N}(\gamma(t))$ nicht von der speziellen Wahl der Kurve γ abhängt (sofern diese $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = \tau$ erfüllt) und die Zuordnung

$$T_p S \ni \tau \to \frac{d}{dt|_0} \mathcal{N}(\gamma(t)) \in T_p S$$

zudem linear ist, vergibt man folgende

<u>BEZEICHNUNG</u>: Das Normalenfeld $\mathcal{N} : S \to S^2$ der Fläche heißt <u>Gauß-Abbildung von S</u>. Die oben in jedem Punkt $p \in S$ erklärte lineare Abbildung $T_p S \longrightarrow T_p S$ heißt <u>Differential</u> in p der Gauß-Abbildung, i. Z. dN_p.

<u>Anmerkung</u>: 1) Da $\mathcal{N}$ nur auf S erklärt ist, läßt sich die Gauß-Abbildung nicht im üblichen Sinn ableiten, man kann lediglich längs Kurven in S differenzieren. ~~Bezeichnet aber $\tilde{\mathcal{N}}$ eine differenzierbare Fortsetzung von $\mathcal{N}$ auf eine offene Umgebung O von S, so gilt:~~

$$\cancel{dN_p(\tau) = \Pi_p\left(\partial_\tau \tilde{\mathcal{N}}(p)\right)},$$

~~wo rechts~~ $\cancel{\partial_\tau \tilde{\mathcal{N}}(p)}$ ~~für die klassische Richtungsableitung von~~ $\cancel{\tilde{\mathcal{N}}}$

2) Offenbar ist dN_p ein Gradmesser für das Krümmungsverhalten der Fläche S.

LEMMA 1.2: Das Differential dN_p ist eine selbstadjungierte lineare Abbildung $T_pS \to T_pS$.

Beweis: Eine lineare Abbildung $A : T_pS \longrightarrow T_pS$ heißt selbstadjungiert oder auch symmetrisch, wenn

$$A(\tau) \cdot \eta = \tau \cdot A(\eta)$$

gilt für alle Vektoren $\tau, \eta \in T_pS$. Hierbei steht "$\cdot$" für das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

Sei F wie üblich die Parametrisierung von S und $\alpha(t)$ eine Kurve in S mit $\alpha(0) = p$. Schreibt man

$$\alpha(t) = F(\beta(t))$$

mit einer geeigneten Kurve β im Definitionsgebiet von F, so folgt:

$$dN_p(\dot\alpha(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 N(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \underbrace{(N \circ F)}_{=:N}(\beta(t)) =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} N\right)(\beta(0)) \cdot \beta_1'(0) + \left(\frac{\partial}{\partial v} N\right)(\beta(0)) \cdot \beta_2'(0),$$

wenn u, v die Variablen im Definitionsgebiet von F bezeichnen und

β_1, β_2 die beiden Komponenten der ebenen Kurve β sind.

(Man beachte: $\mathcal{N}$ ist auf der Fläche S erklärt, N steht für die Verkettung von $\mathcal{N}$ mit der Parametrisierung F.)

Für die speziellen Tangentenvektoren $\quad (p := F(u_0, v_0))$

$$\frac{\partial}{\partial u} F(u_0, v_0) =: \tau_1 \, , \quad \frac{\partial}{\partial v} F(u_0, v_0) =: \tau_2$$

ergibt sich $\quad \left(\beta(t) = (u_0, v_0) + t \cdot (1,0) \text{ bzw. } (u_0, v_0) + t\,(0,1) \right)$

$$d\mathcal{N}_p(\tau_1) = \frac{\partial}{\partial u} N \,(u_0, v_0)$$

$$d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \frac{\partial}{\partial v} N \,(u_0, v_0) \,.$$

Nun ist $d\mathcal{N}_p$ linear und jeder Tangentenvektor $\tau \in T_p S$ eine Linearkombination von τ_1, τ_2. Die Symmetrie von $d\mathcal{N}_p$ ergibt sich demnach, wenn man

$$\tau_1 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \tau_2 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_1) \qquad *$$

verifizieren kann. Es gilt

$$\tau_1 \cdot d\mathcal{N}_p(\tau_2) = \frac{\partial}{\partial u} F(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial}{\partial v} N \,(u_0, v_0) =$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial}{\partial u} F \cdot N \right)\Big|_{(u_0, v_0)} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} (u_0, v_0) =$$

$$- \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial F}{\partial u} (u_0, v_0),$$

denn $\frac{\partial}{\partial u} F$ ist tangential und somit senkrecht zu N.

Die Symmetrie der zweiten Ableitungen liefert

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}(u_0,v_0),$$

und durch analoge Rechnung folgt

$$-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v}(u_0,v_0) = \tau_2 \cdot dN_p(\tau_1),$$

also $*$.

$\blacksquare$

<u>DEFINITION</u> : Die durch

$$\mathrm{II}_p(\xi,\eta) := - dN_p(\xi)\cdot\eta$$

auf T_pS definierte <u>symmetrische</u> Bilinearform heißt <u>2^{te} Fundamentalform von S bei p.</u>

<u>Bemerkung:</u> 1) Das Minuszeichen in der Definition hat historische Gründe.
2) II_p ist eng an die Wahl des kanonischen Normalenfeldes geknüpft, d.h. ersetzt man N durch $-N$ (Umkehr der Orientierung), so ändert II_p das Vorzeichen. Aus diesem Grund betrachtet man oft die

<u>vektorielle 2^{te} Fundamentalform:</u> $\tilde{\mathrm{II}}_p : T_pS \times T_pS \longrightarrow (T_pS)^\perp$

$$(\xi,\eta) \to \{-dN_p(\xi)\cdot\eta\}\, N(p),$$

die offensichtlich invariant ist gegen Änderungen der Orientierung. Außerdem